УДК 517.977

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Г.Ф.КУЛИЕВ, В.Б.НАЗАРОВА
Бакинский Государственный Университет
vera_nazarova@rambler.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебаний стержня с граничным управлением. Решение задачи сводится к проблеме моментов и находится в виде сходящегося ряда.

Ключевые слова: уравнение колебаний, упругий стержень, граничное управление, оптимальное управление.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \qquad (x,t)\in Q=\{0<x<l;0<t<T\}, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \quad x\in[0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t)=\upsilon(t), \quad u(l,t)=0, \quad \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=0, \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

где $\varphi\in W_2^2[0,l]$, $\psi\in L_2[0,l]$- заданные функции, $\upsilon(t)$- граничное управление из $W_2^2[0,T]$ и выполняются условия совместимости $\varphi(0)=\upsilon(0), \varphi(l)=0$.

При этих условиях можно доказать [1], что существует единственное обобщенное решение краевой задачи (1)-(3) из $W_2^{2,1}(Q)$ и такое решение обладает свойствами $u\in C([0,T];W_2^2[0,l])$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in C([0,T];L_2[0,l])$.

Под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается такая функция $u(x,t)\in C(0,T;W_2^2[0,l],L_2(0,l))$ (определение пространства $C(0,T;W_2^2(0,l),L_2(0,l))$ см.[2]), что для любой функции

$$\Phi(x,t)\in C\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^2(0,l),L_2(0,l)\right), \quad \Phi(x,T)=0$$

удовлетворяется интегральное тождество

$$\int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)+\int_0^T\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)dxdt=0,$$

причем выполнение условий $u(x,0)=\varphi(x), u(0,t)=\upsilon(t), u(l,t)=0$ понимается в обычном смысле.

Поставим следующую задачу: найти такое управление $\upsilon(t)$, определенное на $[0,T]$, что квадрат нормы $\|\upsilon\|^2$ которого был бы наименьшей, и в момент T времени выполнялись условия

$$u(x,T)=0, \quad \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0.$$

Отметим, что для уравнения колебаний стержня близкие задачи рассмотрены в работах [3], [4] при других граничных условиях.

2. Решение краевой задачи (1)-(3).

Для того чтобы решить задачу оптимального управления, сначала найдем решение краевой задачи (1)-(3). Поскольку в (3) граничное условие неоднородное, сделав замену

$$w(x,t)=u(x,t)+\frac{x-l}{l}\upsilon(t), \tag{4}$$

для $w(x,t)$ получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{x-l}{l}\upsilon''(t), \tag{5}$$

$$w(x,0)=\varphi(x)+\frac{x-l}{l}\upsilon(0)\equiv\tilde{\varphi}(x), \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=\psi(x)+\frac{x-l}{l}\upsilon'(0)\equiv\tilde{\psi}(x),$$

$$w(0,t)=0, w(l,t)=0, \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2}=0. \tag{7}$$

Решая краевую задачу (5)-(7) методом разделения переменных и учитывая замену (4), для решения краевой задачи (1)-(3) получим окончательное выражение

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t+\psi_n\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^t\upsilon(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad (8)$$

где $\alpha_n=\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^{n+1}+(-1)^n-1\right].$

Условия отсутствия колебаний стержня в момент времени T, т.е выполнение условий $u(x,T)=0, \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0,$ можно записать на основании формулы (8), в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T+\psi_n\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^T\upsilon(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\varphi_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T+\psi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\int_0^T\upsilon(\tau)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Отсюда, учитывая, что функции $X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x$, n=1,2,... образуют полную систему в $L_2[0,l]$, получаем, что нахождение функции $\upsilon(t)$ сводится к решению системы

$$\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T+\frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T=\int_0^T\upsilon(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)d\tau, \qquad (9)$$

$$\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T-\frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T=-\int_0^T\upsilon(\tau)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)d\tau, n=1,2... \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$A=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\frac{\varphi_n}{\alpha_n},\quad B=\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4\frac{\psi_n}{\alpha_n},\quad \alpha=\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T,\quad \beta=\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T,$$

$$y=\int_0^T\upsilon(\tau)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\tau d\tau,\quad z=\int_0^T\upsilon(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\tau d\tau.$$

Тогда из (9),(10) получим систему уравнений относительно y и z:

$$\beta y-\alpha z=A\alpha+B\beta,$$

$$\alpha y + \beta z = B\alpha - A\beta.$$

Отсюда, находим, что $y = B, z = -A.$

Следовательно, система (9), (10) свелась к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \int_0^T \upsilon(\tau)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau d\tau = \frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4, & (11) \\ \int_0^T \upsilon(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau d\tau = -\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2, n = 1,2.... & (12) \end{cases}$$

3.Решение задачи оптимального управления с помощью проблемы моментов.

Таким образом, нахождение решения поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению такого управления $\upsilon(t)$, которое доставляет минимум функционалу $\|\upsilon\|^2_{L_2(0,T)}$ и для него удовлетворяется система уравнений (11), (12), т.е. определение $\upsilon(t)$ сводится к проблеме моментов. Для того, чтобы решить эту бесконечномерную задачу достаточно решить $\forall n \in N$ конечномерную задачу (см.[5]).

На основании теоремы 2 главы 3 из [5] для разрешимости конечномерной проблемы моментов необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая задача: найти

$$\min_{\xi,\eta} \int_0^T \sum_{m=1}^n \left[\xi_m \sin\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t + \eta_m \cos\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t \right]^2 dt = \frac{1}{\lambda^2} \tag{13}$$

при условии

$$\sum_{m=1}^n \left[-\frac{\varphi_m}{\alpha_m}\left(\frac{l}{\pi m}\right)^2 \xi_m + \frac{\psi_m}{\alpha_m}\left(\frac{l}{\pi m}\right)^4 \eta_m \right] = 1, \tag{14}$$

где $\xi = (\xi_1,...,\xi_n), \eta = (\eta_1,...,\eta_n).$ При этом минимальная норма управления $\upsilon(t)$ равна λ, а сама искомая функция $\upsilon(t)$ примет вид

$$\upsilon_n(t) = \lambda^2 \sum_{m=1}^n \left(\xi_m^0 \sin\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t + \eta_m^0 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t \right),$$

где $\xi_m^0, \eta_m^0, m = 1,...,n$ – решение задачи (13), (14).

Для определения ξ_m^0, η_m^0, $m = 1,...,n$, применим метод множителей Лагранжа. Введем функцию

$$F(\xi,\eta) = \int_0^T \left[\sum_{m=1}^n \left(\xi_m \sin\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t + \eta_m \cos\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \right) t \right] dt -$$

$$-\delta\sum_{m=1}^{n}\left[-\frac{\varphi_m}{\alpha_m}\left(\frac{l}{\pi m}\right)^2\xi_m+\frac{\psi_m}{\alpha_m}\left(\frac{l}{\pi m}\right)^4\eta_m\right],$$

где δ – множитель Лагранжа. В силу этого метода для нахождения ξ_m^0, η_m^0, $m=1,\dots,n$, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_p}=2\int_0^T\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m\sin\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t+\eta_m\cos\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{\pi p}{l}\right)^2 tdt+\delta\frac{\varphi_p}{\alpha_p}\left(\frac{l}{\pi p}\right)^2=0,\ p=1,..,n, \quad (15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\eta_p}=2\int_0^T\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m\sin\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t+\eta_m\cos\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 t\right)\cos\left(\frac{\pi p}{l}\right)^2 tdt-\delta\frac{\psi_p}{\alpha_p}\left(\frac{l}{\pi p}\right)^4=0,\ p=1,..,n. \quad (16)$$

Теперь берем $l=\pi, T=2\pi$.

Тогда в силу ортогональности системы $\{\sin m^2 t,\ \cos m^2 t\},\ m=1,2,\dots$ на $[0,2\pi]$ из соотношений (15),(16) получим

$$2\xi_p\int_0^{2\pi}\sin^2 p^2 tdt+\delta\frac{\varphi_p}{\alpha_p}\left(\frac{1}{p}\right)^2=0,\qquad 2\eta_p\int_0^{2\pi}\cos^2 p^2 tdt-\delta\frac{\psi_p}{\alpha_p}\left(\frac{1}{p}\right)^4=0,$$

откуда находим экстремальные значения

$$\xi_p^0=-\frac{\delta}{2\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^2\frac{\varphi_p}{\alpha_p}\ ,\qquad \eta_p^0=\frac{\delta}{2\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^4\frac{\psi_p}{\alpha_p}\ ,\qquad p=1,\dots,n.$$

Подставляя найденные значения ξ_m^0 и η_m^0, $m=1,\dots,n$ в условие (14), получим уравнение для определения параметра δ.

$$\frac{\delta}{2\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{\varphi_m}{\alpha_m}\right)^2\frac{1}{m^4}+\left(\frac{\psi_m}{\alpha_m}\right)^2\frac{1}{m^8}\right)=1.$$

Отсюда

$$\delta=\frac{2\pi}{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\psi_m^2}{m^4}\right)},\qquad \xi_p^0=-\frac{\frac{1}{p^2}\frac{\varphi_p}{\alpha_p}}{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\psi_m^2}{m^4}\right)},$$

$$\eta_p^0=\frac{\frac{1}{p^4}\frac{\psi_p}{\alpha_p}}{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\psi_m^2}{m^4}\right)},\qquad p=1,\dots,n.$$

Легко проверить, что матрица вторых производных функции $F(\xi,\eta)=F(\xi_1,\dots,\xi_n,\eta_1,\dots,\eta_n)$ положительна определена. Поэтому в точке

$\left(\xi^0,\eta^0\right)=\left(\xi_1^0,...,\xi_n^0,\eta_1^0,...,\eta_n^0\right)$ функция $F(\xi,\eta)$ достигает минимума. Поскольку левая часть (13) – квадратичная форма относительно $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$, а ограничение (14) линейное относительно $(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$, то в точке $\left(\xi^0,\eta^0\right)$ левая часть (13) достигает минимума.

Вычислим теперь значение минимума интеграла (13):

$$\frac{1}{\lambda^2}=\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m=1}^{n}\xi_m^0\sin m^2t+\eta_m^0\cos m^2t\right]^2dt.$$

В силу ортогональности системы функций $\{sinm^2t,cosm^2t\}, m=1,2,\dots$, на $[0,2\pi]$, имеем

$$\frac{1}{\lambda^2}=\pi\sum_{m=1}^{n}\left[\left(\xi_m^0\right)^2+\left(\eta_m^0\right)^2\right]=\frac{\pi}{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m^2m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\psi_m^2}{m^4}\right)}.$$

Следовательно

$$\lambda^2=\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m^2m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\psi_m^2}{m^4}\right)}{\pi}$$

и $\lambda^2\xi_m^0=-\frac{1}{\pi m^2}\frac{\varphi_m}{\alpha_m},\qquad \lambda^2\eta_m^0=\frac{1}{\pi m^4}\frac{\psi_m}{\alpha_m},\ m=1,...,n.$

Таким образом, искомое управление определяется выражением

$$\upsilon_n^0(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left[\left(-\frac{\varphi_m}{\alpha_mm^2}\right)\sin m^2t+\left(\frac{\psi_m}{\alpha_mm^4}\right)\cos m^2t\right]$$

и квадрат его нормы минимален и равен

$$\left\|\upsilon_n^0\right\|_{L_2[0,2\pi]}^2=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\alpha_m^2m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\Psi_m^2}{m^4}\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что искомое оптимальное по минимуму квадрата нормы управление определяется выражением

$$\upsilon^0(t)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{\varphi_m}{\alpha_mm^2}\sin\left(m^2t\right)+\frac{\psi_m}{\alpha_mm^4}\cos\left(m^2t\right)\right],\ 0\le t\le 2\pi, \tag{17}$$

причем $\min\|\upsilon\|_{L_2(0,2\pi)}^2=\left\|\upsilon^0\right\|_{L_2(0,2\pi)}^2=\frac{1}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m^2m^4}\left(\varphi_m^2+\frac{\psi_m^2}{m^4}\right).$

Из условий, налагаемых на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует, что ряд (17) и ряды, составленные из производных первого и второго порядка, полученных из (17), сходятся в $L_2(0,T)$. Таким образом, доказана

Теорема. При вышеприведенных условиях поставленная задача оптимального управления имеет решение в виде ряда (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971,327 с.
2. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Моск. ун-т, 1989, 142 с.
3. Mekhtiyev A.A. Optimal control problem for bar oscillations equation. Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences, volume XXVII, №1, Baku: Elm, 2007, pp. 95-104.
4. Guliyev H.F., Mekhtiyev A.A. Optimal control problem for the equation of the bar vibrations. The 2^{nd} International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications. Abstracts, Baku: June 2-4, 2008, p. 68.
5. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.

ÇUBUĞUN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNƏ MOMENT PROBLEMİ ÜSULUNUN TƏTBİQİ

H.F.QULİYEV, V.B.NƏZƏROVA

XÜLASƏ

İşdə sərhəd idarəedicisinin köməyilə idarə olunan çubuğun rəqsləri tənliyi üçün qoyulmuş optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələnin həlli momentlər probleminə gətirilir və optimal idarəedici yığılan sıra şəklində tapılır.

Açar sözlər: rəqslər tənliyi, elastiki çubuq, sərhəd idarəedicisi, optimal idarəedici.

APPLICATION OF MOMENT PROBLEM METHOD TO SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE EQUATION OF ROD OSCILLATIONS

H.F.GULIYEV, V.B.NAZAROVA

SUMMARY

The work considers the optimal control problem for an equation of rod oscillations with a boundary control. The solution of the problem comes to the moment problem and exists in the form of convergent series.

Key words: equation of oscillations, elastic rod, boundary control, optimal control.

Принято в редакцию: 29.12.2012 г.
Подписано к печати: 06.03.2013 г.